

6. cvičení - Extrémy funkcí, Langrangeovy multiplikátory

📦 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

- (a) $f(x, y) = e^x$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.
- (b) $f(x, y) = x$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2], y \in [0, 1], 2x + y \leq 2\}$.
- (c) 📦 $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$.
- (d) $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z$ a $M = [-1, 1]^3$.
- (e) $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 = 1\}$.
- (f) 📦 $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$.
- (g) $f(x, y) = (x + y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (h) $f(x, y) = (x + y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$.
- (i) $f(x, y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$.

Příklad 2 (Bez vzorového řešení). Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

- (a) $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x + y = \frac{\pi}{2}\}$.
- (b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x\}$.
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ a $M = \mathbb{R}^3$.
- (d) $f(x, y) = x + y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- (e) $f(x, y) = xy^6$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^6 + y^6 \leq 64, x \leq 1\}$.
- (f) $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}, 0 < a, b$.
- (g) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}, 0 < c < b < a$.

Příklad 3. Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

- (a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- (b) 📦 $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
- (c) $f(x, y, z) = xyz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$.
- (d) $f(x, y, z) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$.
- (e) 📦 $f(x, y, z) = xy^2z^3$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}, a > 0$.
- (f) $f(x, y) = x^2 + y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$.



Příklad 4 (Bez vzorového řešení). Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a určete, zda a případně kde se jich nabývá.

- (a) $f(x, y, z) = xyz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- (b) ☒ $f(x, y, z) = xyz$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
- (c) $f(x, y) = x + y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (d) $f(x, y) = y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$.
- (e) ☒ $f(x, y) = y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 = axy\}, a > 0$.
- (f) ☒ $f(x, y, z) = 10z + x - y$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$.
- (g) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1\}$.
- (h) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} = 1\}$.
- (i) $f(x, y) = x^4 y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$.
- (j) $f(x, y) = 2x + 4y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (k) $f(x, y, z) = xy + yz$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.
- (l) $f(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{4}{3}x^3$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.
- (m) ☒ $f(x, y, z) = (x^2 + xy + y^2)e^{-z^2}$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$.
- (n) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2 + y^2)}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
- (o) $f(x, y, z) = z + e^{xy}$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$.
- (p) $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$ a $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = x\}$.
- (q) $f(x, y) = \arctan x + \arctan y$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

